SOS

14/12/17

<<Σκονάκι>> Διαφορισιμότητα συναρτήσεων

$f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, ανοιχτό $\bar{x} \in U$.

· Μερικώς διαφορίσιμη $\exists \ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x} + h\bar{e}_i) - f(\bar{x})}{h} \in \mathbb{R}$

μερικές παράγωγοι ως προς x_i στο $\bar{x}$

· Διαφορίσιμη:

$\exists \ \nabla f(\bar{x}) \in \mathbb{R}^n$ και

$$\lim_{\bar{u} \to \bar{0}} \frac{f(\bar{x} + \bar{u}) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{u}}{\|\bar{u}\|} = \bar{0}$$

$\Rightarrow \operatorname{grad} f(\bar{x}) \ (= \nabla f(\bar{x})) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) \right)$.

κλίση της f στο $\bar{x}$

$\Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = Df(\bar{x})$, παράγωγος της f στο $\bar{x}$.

(Διαφορίσιμη κατά κατεύθυνση)

· Παράγωγος κατά κατεύθυνση.

$\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\bar{v}\| = 1$, της f στο $\bar{x}$ $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x}) :=$ ~~$\lim_{h\to 0}$~~

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x} + h\bar{v}) - f(\bar{x})}{h}$$

Άσκηση: Έστω $\boxed{M := \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}}$ = ($y = x$)

άλλο M άλλο $f(x,y)$ καμία σχέση

ίδιο με πάνω M $(= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y, x \neq 0\}) =$

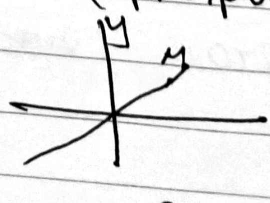
ίδιο M $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : x = y\}$

και $f(x,y) = \begin{cases} e^x - 1, & (x,y) \in M \\ 0, & (x,y) \notin M \end{cases}$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

δηλ. $f: (\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$.

Δ.Ο α) Η f είναι μερικώς διαφορίσιμη αν-ν $(x,y) \notin M$

Η συνάρτηση f το M είναι το Π.Ο) SOS



Το σύνολο $A = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 \ x \in \mathbb{R}\} = M \cup \{(0,0)\}$

είναι κλειστό $\Rightarrow$

όρο να ξέρω SOS

[Είναι κλειστό διότι: Έστω $(x_\nu, y_\nu) \subset A$ και $(x_\nu, y_\nu) \to (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \boxed{x_\nu = y_\nu}$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$x_0 = y_0$

$\Rightarrow (x_0, y_0) = (x_0, x_0) \in A$]

$\Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus A$ είναι ανοιχτό $\Rightarrow$ Αν $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \quad B((x,y), \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \setminus A \Rightarrow \forall (\tilde{x}, \tilde{y}) \in B((x,y), \varepsilon)$:

$: f(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$

άρα $\Rightarrow \forall (x,y) \notin M \cup \{(0,0)\} : \exists\, \nabla f(x,y) = (0,0)$ και

Για $(x,y) = (0,0)$ θέλω να δω αν f μερ. διαφορίσιμη

$\lim_{\substack{h \to 0 \\ (h \neq 0)}} \frac{\overbrace{f(0+h, 0)}^{f(h,0)=0} - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h} = 0$ και ανάλογα

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

$\Rightarrow \forall (x,y) \notin M \quad \exists\, \nabla f(x,y) = (0,0)$.

μετά πάω στο M Για $(x_0, y_0) \in M$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \underset{x_0}{y_0}) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ (h \neq 0)}} \frac{\overbrace{f(x_0+h, \underset{x_0}{y_0})}^{=0} - \overbrace{f(x_0, \underset{x_0}{y_0})}^{\neq 0}}{h}$

άρα το όριο δεν υπάρχει

ανάλογα $\nexists\, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, x_0)$.

β) $\underline{\text{N.δ}}$ Η $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(0,0) \in \mathbb{R}$ $\exists$ $\forall\, \bar{v} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\bar{v}\| = 1$

$(\bar{v} = (v_1, v_2))$.

$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{f(hv_1, hv_2)}^{=0} - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h}$

όταν $(v_1 \neq v_2) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(0,0) \;\exists$

Άρα για $\bar{v} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$. έχαμε

$\|\bar{v}\| = 1 \quad x = y$.

$v_1^2 + v_2^2 = 2v_1^2$ άρα $v_1 = v_2$

$$\cancel{\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(0,0) = \lim_{h\to 0} f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(0,0) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ (h\neq 0)}} \frac{f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}h(1,1)\right) - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}h} - 1}{h} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{h\to 0} \frac{e^{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}h} - 1}{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}h}$$

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{a\to 0} \frac{e^a - 1}{a} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Διαπίστωση: Η $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(0,0)$ $\exists$ $\forall \bar{v} \in \mathbb{R}^2$, $\|\bar{v}\| = 1$.

για $\bar{v} \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ έχαμε $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(0,0) = 0$

γ) Δ.Ο.
$\exists\, \bar{v} \in \mathbb{R}^2$, $\|\bar{v}\| = 1$. με $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(0,0) \neq \underbrace{\nabla f(0,0) \cdot \bar{v}}_{=0}$

$\overset{(α)}{=} (0,0)$

Π.χ για $\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

Παρατήρηση: Είχαμε αποδείξει ότι
αν $f: U \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο $\bar{x_0}$
τότε $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x_0}) = \underbrace{Df(\bar{x_0})}_{=\nabla f(\bar{x_0})} \cdot \bar{v}$

$\forall\, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\bar{v}\| = 1$
άρα η f της άσκησης δεν είναι διαφορ. στο (0,0).

παρόλο που ∃ όλες οι $\frac{df}{d\bar{v}}$ $\forall \bar{v}$

δ) Είναι η $f(x,y) = \begin{cases} e^x - 1, & (x,y)\in M = \{(x,x)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0\} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

συνεχής στο (0,0);

(δηλ. ισχύει $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \underbrace{f(0,0)}_{=0}$).

(⇐) Αν $\underbrace{(x_\nu,y_\nu)\to(0,0)}_{\Leftrightarrow x_\nu\to 0 \,\wedge\, y_\nu\to 0}$ τότε $0 \le \underbrace{|f(x_\nu,y_\nu)|}_{=\begin{cases} e^{x_\nu}-1, & (x_\nu,y_\nu)\in M \\ 0 \end{cases}} \to 0$)

$\le |e^{x_\nu}-1| \to 0$

$(x \to e^x$ σ/ς$)$.

Καμπύλες στο $\mathbb{R}^n$

α) Υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ (μιας «ειδικής μορφής»)

β) Μια απεικόνιση $\bar{\gamma} : [a,\beta] \to \mathbb{R}^n$

$t \to \bar{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^n$

η οποία είναι σ/ς, λέγεται (παραμετρική) καμπύλη δηλ. μία συνάρτηση) και η εικόνα της $\bar{\gamma}([a,\beta]) \subset \mathbb{R}^n$ καμπύλη του $\mathbb{R}^n$

Επίσης το $t\in[a,\beta]$ ονομάζεται παράμετρος της καμπύλης.

Επίσης, έστω $C\subset\mathbb{R}^n$. Αν ∃ $\gamma : [a,\beta] \to \mathbb{R}^n$ σ/ς έ.ω. $\bar{\gamma}([a,\beta]) = C$ τότε λέμε ότι η $\bar{\gamma}$ παραμετρικοποιεί την C